

CALCUL MATRICIEL, DÉTERMINANTS, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Voici quelques exercices permettant de s'exercer aux compétences visées par le programme. Bon travail!

A. Vandenbruaene

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = (3 \ 7)$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Calculez si possible : A^2 , $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$ et $C \cdot B$.

b) La matrice A est-elle solution de l'équation

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3A - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} ?$$

c) Résoudre l'équation matricielle suivante où X est la matrice inconnue :

$$3A - X = 2X - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

2. Exercice n°6 page 8 de votre fascicule de cours.

3. Exercice n°10 page 8 de votre fascicule de cours.

4. Déterminez la matrice inverse de chacune des matrices suivantes en utilisant la méthode de la matrice adjointe :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Dans chacun des cas suivants, déterminez une équation cartésienne du plan ABC en utilisant la méthode du déterminant.

a) $A(-1,2,6)$, $B(0,1,0)$ et $C(1,3,0)$.

b) $D(4,0,0)$, $E(0,0,2)$ et $F(2,3,1)$.

6. Résolvez les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de GAUSS et l'écriture matricielle simplifiée.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 10y + z = -5 \\ x + 4y - z = -7 \\ -2x - 6y - z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 4y + 2z = -3 \\ y + 3z = -2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

7. Résolvez chacun des systèmes d'équations suivants. Interprétez géométriquement les résultats en considérant que chaque équation est celle d'un plan dans l'espace.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ 4x + y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + 4y - 6z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

-
8. En janvier 2012, un investisseur achète des actions de trois sociétés : X (5 euros l'action), Y (4 euros l'action), et Z (10 euros l'action). Au total, il achète 10 actions pour un montant de 63 euros. En juillet 2012, l'action X a doublé sa valeur, l'action Y a augmenté de 25 %, et l'action Z a diminué de 40 %. Le portefeuille de l'investisseur vaut alors 78 euros. Déterminez le nombre d'actions de chaque société qu'il a achetées.

-
9. Un chimiste dispose de trois solutions d'acide chlorhydrique. La première contient 10 % d'acide, la deuxième 30 %, et la troisième 50 %. Le chimiste voudrait utiliser les trois solutions pour obtenir 50 litres d'un mélange contenant 32 % d'acide. S'il veut utiliser deux fois plus de solution à 50 % que de solution à 30 %, combien de litres de chaque solution devrait-il utiliser ?

-
10. Une population stable de 35 000 oiseaux vit sur trois îles. Chaque année, 10 % de la population de l'île A migre vers l'île B, 20 % de la population de l'île B migre vers l'île C, et 5 % de la population de l'île C migre vers l'île A. Trouvez le nombre d'oiseaux sur chaque île si la population sur chacune d'elles ne varie pas d'une année à l'autre.
-