5 A-B Décembre 2011

MATHÉMATIQUE (6h)

Corrigé de l'évaluation formative : vecteurs de l'espace – produit scalaire

1. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1,2,3)$, $B(0,\text{-}2,4)$ et $C(2,\text{-}3,1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-1,-4,1)$ et $\overrightarrow{AC}=(1,-5,-2)$.

b) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

c) $2.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=2\cdot(-1,-4,1)-(1,-5,-2)=(-3,-3,4)$.

d) $\left\|2.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{34}$.

e) Il faut que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ avec $D(x,y,z)$.

$$(-1,-4,1)=(2-x,-3-y,1-z)\ \rightarrow\ \begin{cases}-1=2-x\\-4=-3-y\\1=1-z\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x=3\\y=1\\z=0\end{cases}\ \rightarrow\ D(3,1,0)$$

f) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-1\cdot1+(-4)\cdot(-5)+1\cdot(-2)=17$.

---

2. Il faut que $\vec{u}=k\cdot\vec{v}\Leftrightarrow(a+3,7,8)=k\cdot(25,35,b+37)$. La comparaison des deuxièmes composantes donne $k=\dfrac{1}{5}$.

En comparant les autres composantes, on trouve : $\begin{cases}a+3=5\\8=\dfrac{1}{5}\cdot(b+37)\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$.

---

3. a) $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}$; donc $P=E$.

b) $\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$; donc $Q=B$.

c)
- $\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{DA}=4\cdot4=16$ (en effet, on multiplie la longueur de $\overrightarrow{DA}$ par la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{DB}$ sur $\overrightarrow{DA}$; la projection de D est D lui-même et celle de B est A).
- $\overrightarrow{ED}\bullet\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}\bullet\overrightarrow{ED}=\left\|\overrightarrow{ED}\right\|^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2=32$ (en effet, on multiplie la longueur de $\overrightarrow{ED}$ par la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{EC}$ sur $\overrightarrow{ED}$; la projection de E est E lui-même et celle de C est D).

---

4. a) $\overrightarrow{GI} \bullet \overrightarrow{AJ} = -2 \cdot 2 = -4$

   b) $\overrightarrow{KF} \bullet \overrightarrow{FD} = 2 \cdot 4 = 8$

   c) $\overrightarrow{JG} \bullet \overrightarrow{IA} = -5 \cdot 2 = -10$

   d) $\overrightarrow{LD} \bullet \overrightarrow{JG} = -5 \cdot 5 = -25$

---

5. La force de pesanteur a une composante parallèle au plan incliné, et l'intensité de celle-ci vaut $650 \cdot \sin 37° \approx 391{,}18$ (Newtons). Le travail effectué par la force de pesanteur vaut donc $650 \cdot \sin 37° \cdot 5 \approx 1955{,}90$ (Joules).

---

6. On donne les points $P(3,0,4)$, $Q(2,5,-1)$ et $R(2,6,z)$.
   Pour que le triangle soit rectangle en P, il faut que $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}$, c'est-à-dire :

   $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR} = 0$

   $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR} = (-1{,}5{,}-5) \bullet (-1{,}6{,}z-4) = 1 + 30 - 5 \cdot (z-4) = -5z + 51$

   Donc : $-5z + 51 = 0 \rightarrow z = \dfrac{51}{5}$.
