

## FONCTIONS ET GRAPHIQUES

Contenus	Directives et commentaires
<p>Description et comparaison de graphiques.</p> <p>Manipulation de fonctions par les transformations suivantes :</p> $f(-x),  f(x) , kf(x), f(x) + k,$ $f(x + k), f(x) + g(x).$ <p>Composition de fonctions de référence.</p> <p>Décomposition d'une fonction en fonctions de référence.</p> <p>Expression analytique d'une fonction qui approxime un nuage de points.</p>	<p>Au cours de ce travail sur les familles de fonctions, on veillera à</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- réactiver le vocabulaire et les notations introduits en quatrième (ordonnée à l'origine, racines, croissance, extremums, domaine, parité),</li> <li>- faire le lien avec des sujets relevant des sciences, des sciences humaines ou encore avec des phénomènes numériques ou géométriques,</li> <li>- écrire une fonction homographique de la forme <math>f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}</math> sous la forme <math>\frac{n}{x + p} + q</math>.</li> </ul>

## COMPETENCES

### *Expliciter les savoirs et les procédures*

- Décrire les caractéristiques générales d'une fonction à partir du graphique en utilisant un vocabulaire précis.
- À partir des graphiques de deux fonctions, trouver des caractéristiques de leur somme<sup>31</sup>.
- Décomposer une fonction en fonctions de référence (pas plus de trois étapes).

### *Appliquer une procédure*

- Un ensemble de graphiques et d'expressions analytiques étant donnés, retrouver les correspondances.

### *Résoudre un problème*

- Représenter une situation, un problème à l'aide du graphique d'une fonction.
- Rédiger un commentaire à propos d'un graphique et de son contexte.
- À partir d'un graphique qui correspond à une situation donnée, trouver des informations complémentaires (par exemple, déterminer un bénéfice à partir des graphiques de recettes et de coûts).
- Extrapoler une valeur qui ne se trouve pas dans un tableau relatant les résultats d'une expérience, de données statistiques... On soumettra aux élèves des « nuages de points » qui peuvent être modélisés par une fonction du premier ou du deuxième degré<sup>32</sup>, une fonction inverse.

SUITES, LIMITES ET ASYMPTOTES

Contenus	Directives et commentaires
<p>Construction de suites dans diverses situations : à partir du premier terme et de la raison, du premier terme et d'un autre terme donné, d'une formule de récurrence...</p> <p>Suites arithmétiques et géométriques, somme de termes, limites associées.</p> <p>Limite d'une suite.</p>	<p>Les contextes peuvent être : des suites numériques, des problèmes de capitalisation, le nombre d'or dans une suite de figures géométriques<sup>33</sup>, divers calculs de longueur, d'aire, de volume ...</p> <p>On étudiera <math>\lim_{n \rightarrow \infty} q^n</math> et on établira que <math>1 + q + q^2 + \dots + q^n</math> tend vers <math>\frac{1}{1-q}</math> si <math> q  &lt; 1</math>, lorsque <math>n</math> devient de plus en plus grand.</p>
<p>Opérations fondamentales sur les nombres réels.</p> <p>Propriété des intervalles emboîtés.</p>	<p>Pratiquement, un nombre réel est utilisé à partir de son écriture décimale et les opérations fondamentales sont alors définies à partir d'encadrements décimaux successifs.</p> <p>Le calcul de tels encadrements sera l'occasion</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- de revenir sur la manipulation des inégalités et des valeurs absolues,</li> <li>- de calculer l'approximation du résultat d'une opération entre deux réels au départ de leurs approximations respectives,</li> <li>- de s'interroger sur la signification des résultats affichés par une calculatrice ou tout autre logiciel de calcul.</li> </ul> <p>Des exemples permettront de constater qu'il y a toujours un rationnel entre deux irrationnels, un irrationnel entre deux rationnels.</p>

<p>Limites et asymptotes</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Limite finie en <math>+\infty, -\infty</math> de fonctions. Équation d'asymptotes horizontales.</li> <li>- Limite infinie en un réel, limite à gauche et limite à droite. Équation d'asymptotes verticales.</li> <li>- Limite infinie en <math>+\infty, -\infty</math>. Équation d'asymptotes obliques.</li> <li>- Limites réelles en un réel.</li> </ul>	<p>La notion de limite sera interprétée à partir de graphiques et de suites. Les définitions seront formulées en termes de « <math>\varepsilon, \delta</math> ».</p> <p>On privilégiera les calculs de limites qui donnent lieu à une asymptote ou un point "de discontinuité".</p> <p>L'équation d'une asymptote oblique est déterminée, selon le cas, par division euclidienne ou par les formules de Cauchy.</p> <p>Quelques graphiques de fonctions discontinues seront envisagés. On déterminera les limites à gauche et à droite aux points de discontinuité.</p>
<p>Règles de calcul des limites.</p> <p>Cas d'indétermination.</p> <p>Limites de fonctions trigonométriques.</p>	<p>Avant de les calculer par les méthodes classiques, les limites des fonctions pourront être conjecturées sur base d'expérimentations avec une calculatrice ou un logiciel approprié.</p> <p>On fera la synthèse des règles de calcul de limites et des cas d'indétermination effectivement rencontrés dans les fonctions étudiées.</p> <p>On peut conjecturer le résultat de <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}</math> en considérant que <math>\sin x \approx x</math> pour <math>x</math> suffisamment petit et exprimé en radian. Il faut ensuite montrer ce résultat par le biais d'un encadrement adéquat (procédé qui fait référence à ce que l'on appelle parfois « le théorème du sandwich »).</p> <p>L'étude des fonctions trigonométriques peut être postposée et associée au calcul des dérivées, aux formules de duplication et d'addition, à la résolution d'équations élémentaires.</p>
<p>Continuité d'une fonction en un point. Expression de la continuité au point d'abscisse <math>a</math> par la condition</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$ <p>Continuité sur un intervalle.</p> <p>Théorème des valeurs intermédiaires et image d'un segment fermé.</p>	<p>Ces notions seront interprétées graphiquement et numériquement au moyen de contre-exemples et d'exemples.</p> <p>Les démonstrations ne sont pas requises, mais on discutera à partir d'exemples et de contre-exemples de la pertinence des hypothèses.</p> <p>Ces théorèmes pourront être énoncés et appliqués lors de la résolution approchée d'équations (méthode de dichotomie).</p>

## COMPETENCES

### *Expliciter les savoirs et les procédures*

- À partir de données numériques (qui comportent éventuellement des nombres irrationnels) ou graphiques, écrire une suite arithmétique ou géométrique, compléter une suite.
- Illustrer une limite par un graphique (exemple :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ ).
- Dessiner l'allure du graphique d'une fonction vérifiant des conditions portant sur des limites et/ou des asymptotes.
- Interpréter une expression telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  en écrivant la définition correspondante en termes de «  $\varepsilon$ ,  $\delta$  ».
- Prévoir l'existence d'asymptotes en observant le graphique et/ou l'expression analytique d'une fonction.
- Déterminer la valeur d'une limite à partir du graphique d'une fonction.
- Estimer l'image d'un réel par une fonction en exploitant son comportement asymptotique.

### *Appliquer une procédure*

- Déterminer un terme, la somme de  $n$  termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer une limite et, s'il y a lieu, lever une indétermination dans les cas de fonctions rationnelles, irrationnelles, trigonométriques.
- Déterminer les équations des asymptotes au graphique d'une fonction (rationnelle ou irrationnelle).
- Contrôler la plausibilité du résultat d'un calcul en utilisant une calculatrice graphique ou un logiciel approprié.
- Dédire l'approximation d'un résultat d'une opération entre deux réels au départ de leurs approximations respectives.

### *Résoudre un problème*

- Résoudre un problème conduisant à utiliser les propriétés des suites arithmétiques ou géométriques.

## DERIVEE

Contenus	Directives et commentaires
<p>Nombre dérivé en un réel, défini à partir du taux de variation.</p> <p>Fonction dérivée.</p>	<p>Le nombre dérivé sera illustré dans divers contextes : géométrique (pente de la tangente), cinématique (vitesse), économique (coût marginal), ...</p>
<p>Démontrer les formules de calcul des dérivées des fonctions :</p> <p><math>f(x) = k</math> , <math>f(x) = x</math> ,</p> <p><math>f(x) = x^n</math> avec <math>n</math> naturel.</p>	<p>La formule du calcul de la dérivée de <math>f(x) = x^n</math> avec <math>n</math> naturel sera étendue sans démonstration aux valeurs de <math>n</math> rationnelles.</p>
<p>Définition de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions.</p> <p>Formule de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions dérivables.</p>	<p>On démontrera les formules suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dérivée des fonctions de référence,</li> <li>- dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables.</li> </ul>
<p>Formule de la dérivée de la composée de deux fonctions.</p>	<p>Cette formule sera admise sans démonstration.</p> <p>On appliquera cette même formule pour calculer par exemple : <math>(\sin f)'</math> , <math>(\cos f)'</math> , <math>(\tan f)'</math> .</p>
<p>Détermination de points particuliers (points anguleux, de rebroussement, point qui admet une tangente verticale).</p>	<p>On aura recours aux graphiques de certaines fonctions (par exemple <math>\sqrt{x}</math> ; <math> x - 2 </math>...) pour illustrer la non-dérivabilité.</p>
<p>Théorème de Rolle.</p> <p>Théorème de Lagrange (théorème des accroissements finis).</p>	<p>Ces théorèmes seront formulés rigoureusement, illustrés graphiquement à partir d'exemples et de contre-exemples (qui montrent que toutes les hypothèses sont indispensables), mais pas démontrés.</p>
<p>Relation entre la croissance d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée première.</p> <p>Relation entre la concavité du graphique d'une fonction deux fois dérivable et le signe de sa dérivée seconde.</p>	<p>La réalisation d'un tableau de variations constitue un exercice dans lequel l'élève intègre la plupart des savoirs concernant les fonctions.</p> <p>Cependant il faut insister pour que l'élève ait recours à une procédure qui tient compte de la famille de fonctions considérée. Il doit réaliser par exemple que calculer une dérivée n'est pas toujours nécessaire pour connaître un extremum.</p>

Représentation graphique de quelques fonctions. Recherche d'extremums dans le cadre de problèmes d'optimisation <sup>34</sup> . Approximation locale d'une fonction par une fonction du premier degré. Méthode(s) de résolution approchée d'une équation.	Chaque fois que l'occasion se présentera, il sera fait usage des moyens modernes de calcul, à tout le moins dans un but de vérification. Le calcul d'une croissance moyenne, d'une croissance instantanée, d'extremums, d'approximation locale, de racines... sera intégré dans des problèmes liés à la physique, l'économie, les sciences humaines...
--	---

## COMPETENCES

### *Expliciter les savoirs et les procédures*

- Interpréter géométriquement le nombre dérivé d'une fonction.
- Démontrer les règles de calcul de dérivation (voir les directives ci-dessus).
- Réaliser un tableau de variation qui correspond à un graphique donné.
- Interpréter dans son contexte la dérivée d'une fonction en un point (taux de croissance, croissance instantanée, extremum).
- Lors du calcul d'une dérivée, vérifier la plausibilité du résultat en utilisant les aspects numériques, algébriques et graphiques.
- Deux ensembles de graphiques étant donnés, associer chaque graphique de fonction à celui de sa fonction dérivée. Justifier.
- Le graphique d'une fonction étant donné, dessiner l'allure du graphique de la fonction dérivée.

### *Appliquer une procédure*

- Déterminer la dérivée d'une fonction rationnelle, irrationnelle, trigonométrique.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point du graphique d'une fonction.
- Déterminer la dérivée d'une fonction à partir de sa décomposition en fonctions de référence.
- Etudier les variations d'une fonction rationnelle, irrationnelle, trigonométrique.

### *Résoudre un problème*

- Dans un contexte qui requiert un travail de modélisation, comparer des modes de croissance, déterminer un extremum.

## CALCUL VECTORIEL

Contenus	Directives et commentaires
<p>Dans l'espace,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- coordonnées d'un point,</li> <li>- distance entre deux points,</li> <li>- composantes d'un vecteur,</li> <li>- égalité de vecteurs,</li> <li>- norme d'un vecteur,</li> <li>- somme de vecteurs (relation de Chasles),</li> <li>- produit d'un vecteur par un réel,</li> <li>- propriétés du calcul vectoriel.</li> </ul>	<p>Ces notions seront étudiées à partir de solides (cubes, parallélépipèdes...) et dans des systèmes orthonormés.</p> <p>On traitera vectoriellement des configurations de l'espace et on interprétera géométriquement des relations vectorielles.</p>
<p>Produit scalaire dans le plan et dans l'espace.</p> <p>Propriétés de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire.</p> <p>Le théorème de Pythagore généralisé (AL KASHI) sera exprimé en termes de produit scalaire de deux vecteurs.</p>	<p>On exprimera le produit scalaire sous des formes faisant intervenir :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- la fonction cosinus,</li> <li>- la projection d'un vecteur sur l'autre,</li> <li>- les composantes dans un repère orthonormé.</li> </ul>
<p>Applications du produit scalaire (calcul de distance, orthogonalité, angles).</p>	<p>Le produit scalaire sera utilisé pour résoudre des problèmes élémentaires de géométrie et de physique.</p>

## COMPETENCES

### *Expliciter les savoirs et les procédures*

- Déduire les propriétés d'une figure à partir d'une relation vectorielle.
- Interpréter géométriquement des relations vectorielles.
- Démontrer une propriété géométrique qui a été explorée en classe.

### *Appliquer une procédure*

- Associer les coordonnées d'un point à sa position dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
- Décomposer un vecteur suivant les directions du repère et lui associer un triplet de nombres.
- Calculer un produit scalaire en utilisant la forme adéquate.
- Calculer l'angle formé par deux vecteurs, la distance entre deux points, la norme d'un vecteur.
- Vérifier l'orthogonalité de deux vecteurs.

### *Résoudre un problème*

- Caractériser différentes configurations de l'espace en termes vectoriels.
- Utiliser le calcul vectoriel, le produit scalaire pour justifier une propriété relative à un polyèdre déterminé<sup>35</sup>.
- Rédiger et présenter avec clarté, rigueur et concision la démonstration d'une propriété.

## GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Contenus	Directives et commentaires
Orthogonalité dans l'espace.	Les critères d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, de deux plans seront envisagés d'un point de vue synthétique.  On étudiera au moins la perpendiculaire commune à deux droites gauches et le plan médiateur.
Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'un plan, d'une droite.	On traitera des problèmes <ul style="list-style-type: none"> <li>- d'incidence, de parallélisme entre deux droites, entre deux plans,</li> <li>- de perpendicularité de plans,</li> <li>- d'orthogonalité de droites,</li> <li>- de distance d'un point à une droite, à un plan, entre deux droites, entre deux plans.</li> </ul> Plusieurs exercices peuvent conduire à la résolution et à la discussion de systèmes du premier degré.
Démonstrations qui utilisent des propriétés de figures, des vecteurs.	Les problèmes et les démonstrations concerneront : l'incidence, l'alignement, les points cocycliques, le plan médiateur et les lieux de points, les distances, l'orthogonalité, le barycentre.  Dans certains cas, il est intéressant de varier les méthodes de résolution et d'explorer les ressources des différentes approches (synthétique, analytique ou vectorielle).

## COMPETENCES

### *Expliciter les savoirs et les procédures*

- Énoncer et démontrer les critères d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, de 2 plans.
- Justifier la construction de la perpendiculaire commune à deux droites gauches.
- Restituer une démonstration et identifier le mode de raisonnement.

### *Appliquer une procédure*

- Établir des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite, d'un plan à partir d'éléments qui les déterminent.
- Calculer analytiquement la distance entre deux points, entre un point et une droite, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans, entre deux droites gauches (étapes intermédiaires éventuellement données).

### *Résoudre un problème*

- Utiliser les caractéristiques du plan médiateur dans des problèmes de distance.
- Démontrer une propriété nouvelle en exploitant des modes de raisonnement déjà exercés.
- Rédiger et présenter avec clarté, rigueur et concision une démonstration d'une propriété géométrique nouvelle.

CALCUL MATRICIEL, DETERMINANTS, SYSTEMES D'EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

Contenus	Directives et commentaires
<p>Calcul matriciel. Définitions. Opérations fondamentales : transposée d'une matrice, somme de deux matrices, opposée d'une matrice, produit d'une matrice par un nombre réel, produit de deux matrices, inverse d'une matrice.</p>	<p>Les opérations classiques seront introduites ou illustrées à partir de contextes que l'on modélise (géométrie, économie, démographie, ...). Dès que l'ordre des matrices dépassera 3, on aura recours à une calculatrice graphique ou à un ordinateur.</p>
<p>Déterminants. Calcul et propriétés.</p>	<p>L'étude des déterminants permet, entre autres, de discuter certains systèmes d'équations.</p>
<p>Résolution de systèmes <math>m \times n</math> dans lesquels <math>m</math> et <math>n</math> ne dépassent pas 3. Discussion de systèmes <math>n \times n</math> à un paramètre (<math>n \leq 3</math>).</p>	<p>La solution d'un système d'équations sera interprétée géométriquement.</p>

COMPETENCES

***Expliciter les savoirs et les procédures***

- Interpréter géométriquement la solution d'un système d'équations.

***Appliquer une procédure***

- Effectuer des calculs où interviennent des matrices.
- Écrire l'équation d'un plan à l'aide d'un déterminant.
- Utiliser les principes d'équivalence, les matrices, les déterminants pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.

***Résoudre un problème***

- Modéliser une situation (géométrique ou non) en faisant appel à un système d'équations linéaires et résoudre celui-ci.

## TRIGONOMETRIE

Contenus	Directives et commentaires
Formules d'addition, de duplication. Formules de Carnot. Formules exprimant $\sin x$ , $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan \frac{x}{2}$ . Formules de Simpson.	Les exercices seront choisis en vue d'acquérir les compétences utiles dans d'autres contextes (étude des fonctions, calcul intégral, nombres complexes, physique).
Équations et inéquations trigonométriques simples.	On résoudra des équations du type $a \cos x + b \sin x = c$ .  Quelques équations telles que $\cos x = x$ seront résolues de manière approchée, par itération (utiliser une calculatrice graphique ou un logiciel).  Pour les inéquations, on se limitera à celles qui se ramènent à l'une des familles suivantes :  $\sin(mx + p) < a$ ; $\cos(mx + p) < a$ ; $\tan(mx + p) < a$

## COMPETENCES

### *Expliciter les savoirs et les procédures*

- Démontrer une formule trigonométrique étudiée.
- Vérifier une identité trigonométrique en s'appuyant sur une technique exercée.

### *Appliquer une procédure*

- Utiliser les différentes formules mentionnées dans le programme pour transformer des expressions qui serviront dans d'autres contextes (équations et fonctions).
- Résoudre des équations et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
- Résoudre des inéquations simples et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

### *Résoudre un problème*

- Résoudre un problème qui requiert de construire et/ou d'interpréter le graphique d'une fonction périodique.