COURBES DONNÉES PAR LEUR ÉQUATION POLAIRE

Les coordonnées cartésiennes, qui nous sont familières, sont parfois mal adaptées à certaines situations. En effet, il vaut parfois mieux repérer un point du plan à l'aide d'une distance *par rapport à un point fixe O, appelé* pôle*, et un* angle *par rapport à une demi-droite fixe d'origine O. Chaque point du plan sera alors repéré par ses* coordonnées polaires*.*
En physique, ce système de repérage est bien adapté à l'étude du pendule, du mouvement circulaire ou autres mouvements orbitaux. En navigation, un système analogue est utilisé en donnant la distance depuis le point de départ, et un angle (cap) pour atteindre la destination.

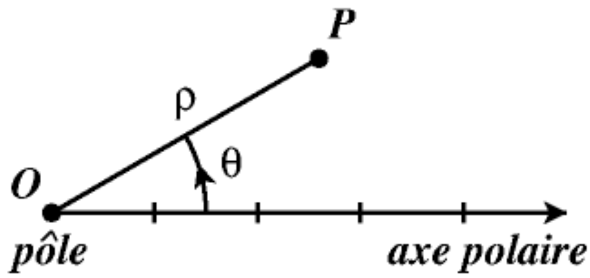
En mathématique, certaines courbes ayant une équation compliquée en coordonnées cartésiennes, ont par contre une équation simple en coordonnées polaires

1. Coordonnées polaires

Nous commençons par choisir un point du plan, appelé *pôle* (ou *origine*) et marqué O. Ensuite, nous traçons une demi-droite d'origine O, appelée *axe polaire*. Cet axe est généralement choisi de façon à correspondre à la partie positive de l'axe des abscisses dans un repère cartésien.

Un point P du plan, différent de l'origine, sera déterminé par

- la distance ρ à laquelle il se trouve de O (cette distance est appelée *rayon polaire*) ;
- une mesure θ de l'angle orienté formé par l'axe polaire et la droite OP (cet angle est appelé *angle polaire*[1]) ; la mesure peut être donnée en radians ou en degrés.



Les nombres ρ et θ sont des *coordonnées polaires* de P et on note $P(\rho,\theta)$.

Remarques

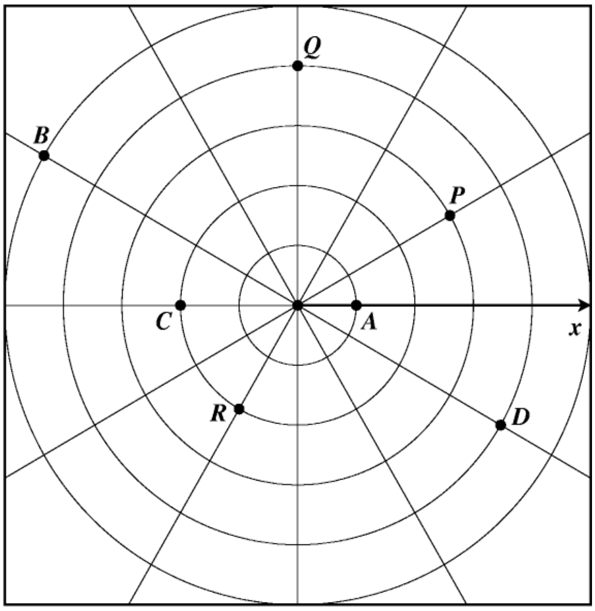
- Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires d'un point ne sont pas uniques. En effet, le point P de la figure précédente possède une infinité de coordonnées polaires de la forme $(\rho,\theta + k\cdot 2\pi)$ $(k \in Z)$.
- Il est convenu que $(0,\theta)$ représente le pôle, quelle que soit la valeur de θ.

[1] Rayon polaire et angle polaire correspondent respectivement au module et à l'argument du nombre complexe qui est l'affixe de P.

Exemples

La figure de droite montre un *réseau polaire* dans lequel :

- les cercles concentriques de centre O ont pour rayon 0 , 1 , 2 , 3 , …
- les droites passant par O forment avec l'axe polaire un angle dont une mesure en radians est 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, …



Pour les points indiqués, nous avons les coordonnées polaires suivantes :

$$P\left(3,\frac{\pi}{6}\right)\ ,\ Q\left(4,\frac{\pi}{2}\right)\ \text{ et }\ R\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)\ .$$

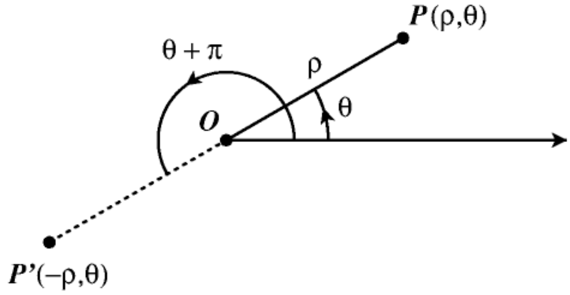
Voici d'autres coordonnées polaires possibles pour ces points :

$$P\left(3,\frac{13\pi}{6}\right)\ ,\ P\left(3,-\frac{11\pi}{6}\right)\ ,\ Q\left(4,\frac{5\pi}{2}\right)\ ,\ Q\left(4,-\frac{3\pi}{2}\right)\ ,\ R\left(2,-\frac{2\pi}{3}\right)\ \text{ et }\ R\left(2,-\frac{8\pi}{3}\right)\ .$$

Exercice : donner des coordonnées polaires des points A , B , C et D , marqués dans la figure précédente.

Extension de la notion de coordonnées polaires

Nous accepterons des coordonnées polaires telles que $(-\rho,\theta)$ avec $\rho > 0$, et nous leur attribuerons la signification suivante : le point $P'(-\rho,\theta)$ est l'image du point $P(\rho,\theta)$ par une symétrie centrale dont le centre est le pôle (voir figure ci-dessous).



Notons bien que l'angle entre OP' et l'axe polaire a bien $\theta+\pi$ pour mesure en radians.

Exemples (voir réseau polaire ci-dessus)

- le point P a aussi comme coordonnées polaires $\left(-3,\frac{7\pi}{6}\right)$;
- le point R a aussi comme coordonnées polaires $\left(-2,\frac{\pi}{3}\right)$;

Exercice : placer les points $I\left(-5,\frac{2\pi}{3}\right)$ et $J\left(-1,-\frac{\pi}{2}\right)$ dans le réseau ci-dessus.

2. Représentation graphique d'une fonction polaire

Une fonction polaire est une expression de la forme $\rho = f(\theta)$ ou, plus généralement, $F(\rho,\theta) = 0$. Il est bon de savoir dessiner à la main des courbes données par des équations polaires simples. Voyons quelques exemples.

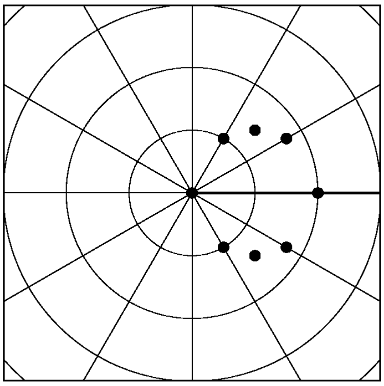
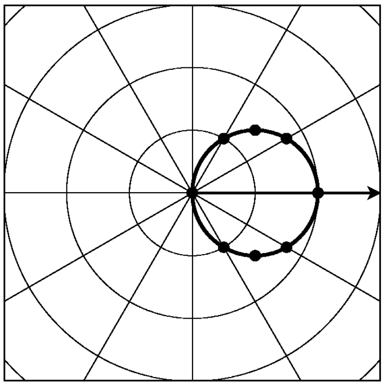
Exemple 1

Représenter la fonction polaire $\rho = 2 \cdot \cos\theta$.

Dressons une table donnant les valeurs de ρ en fonction valeurs particulières de θ comprises entre 0 et π . Si l'on prend des valeurs particulières de θ au-delà de π , on retombe sur les mêmes points (expliquer).

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2

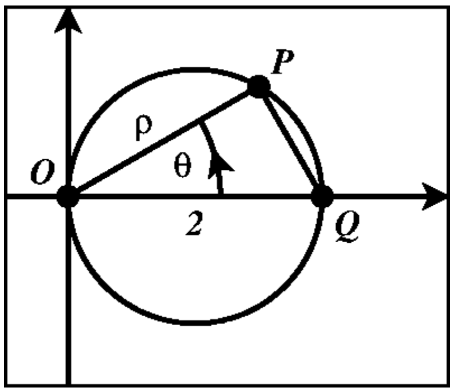
Les points obtenus sont ensuite reportés sur un graphique. Le résultat étant encore assez incertain (graphique de gauche), il faut calculer davantage de points pour se faire une meilleure idée de la courbe.
On peut aussi utiliser la calculatrice graphique, ou un logiciel, ce qui permet d'obtenir le graphique de droite.
Notons que les graphiques polaires sont très faciles à réaliser avec GRAPHMATICA.

Il semble bien que la courbe d'équation $\rho = 2 \cdot \cos\theta$ soit un cercle centré en (1,0) et de rayon égal à 1 . Nous pourrons vérifier cela de façon analytique quand nous aurons vu comment passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

En attendant, voici une vérification géométrique.

Traçons le cercle centré en (1,0) et de rayon 1 . La longueur de son diamètre $[OQ]$ est donc égale à 2 .
Quel que soit le point P du cercle, le triangle OPQ est rectangle en P (pourquoi ?).
D'après les relations dans les triangles rectangles, nous avons donc : $\cos\theta = \frac{\rho}{2} \Leftrightarrow \rho = 2 \cdot \cos\theta$.



Nous avons retrouvé l'équation polaire donnée au départ.

Exemple 2

Représenter la fonction polaire $\rho = 2 + 2 \cdot \cos\theta$.

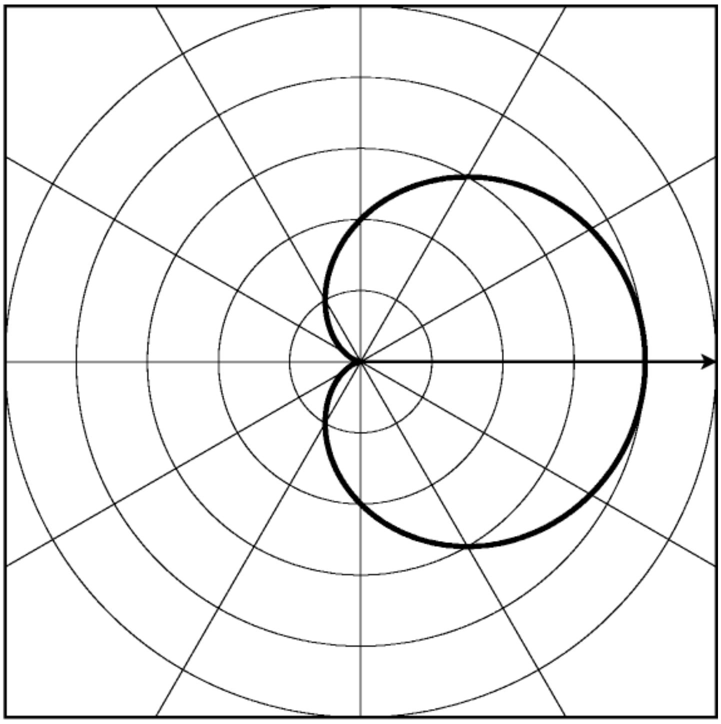
De nouveau, nous pouvons réaliser un tableau. Des valeurs de θ comprises entre 0 et π nous donnerons des points de la moitié supérieure de la courbe.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	0

Remarques

- Étant donné la parité de la fonction cosinus, nous avons $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$. La courbe cherchée sera donc symétrique par rapport à l'axe polaire. C'était aussi le cas de la courbe de l'exemple 1.
- La moitié inférieure de la courbe s'obtient en prenant des valeurs de θ comprises entre π et 2π, ou entre $-\pi$ et 0 (entre autres possibilités).

Finalement, nous obtenons une courbe dont la forme rappelle un cœur : la *cardioïde*.



Exercice

A l'aide d'un logiciel, explorer

a) la famille des *cardioïdes* (équations du type $\rho = a \cdot (1+\cos\theta)$, $\rho = a \cdot (1-\cos\theta)$, $\rho = a \cdot (1+\sin\theta)$ et $\rho = a \cdot (1-\sin\theta)$, avec $a \neq 0$) ;

b) la famille des *limaçons* (équations du type $\rho = a + b \cdot \cos\theta$ et $\rho = a + b \cdot \sin\theta$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$; si $|a| = |b|$, ces courbes sont des cardioïdes).

Exemple 3

Représenter la fonction polaire $\rho = 2 + 4 \cdot \cos\theta$

Pour représenter cette fonction, il suffit de faire varier θ de 0 à 2π (en effet, la fonction cosinus a pour période 2π).
Il est utile de commencer par calculer les valeurs de θ pour lesquelles $\rho = 0$, afin de nous guider dans la réalisation d'un tableau de valeurs.

Résolvons l'équation $\rho = 0$:

$$\rho = 0 \Leftrightarrow 2 + 4 \cdot \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

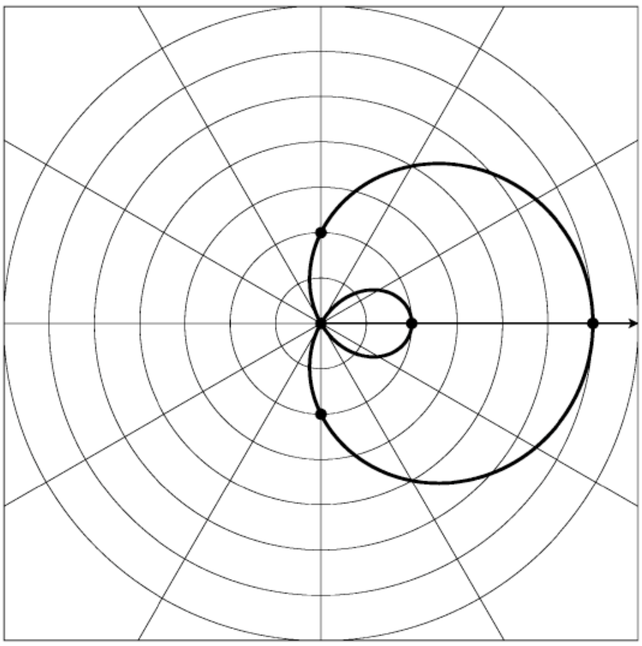
Les solutions dans l'intervalle $[0,2\pi]$ sont $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Voici un tableau donnant ρ en fonction de θ, où figurent les valeurs de θ que nous venons de trouver, ainsi que les valeurs de θ correspondant aux limites des quadrants.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	6	2	0	-2	0	-2	6

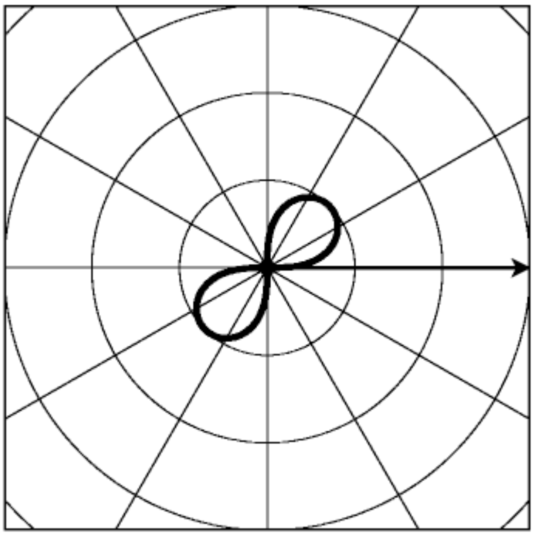
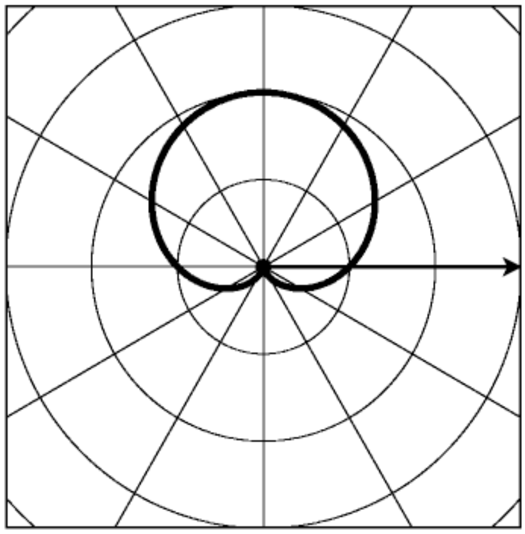
Ce tableau est bien sûr insuffisant et demande à être complété par des valeurs appartenant aux sous-intervalles $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, etc.

Voici la courbe qui en résulte (*limaçon avec une boucle interne)*. Les points du tableau précédent sont en gras.



Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire, comme nous pouvions nous y attendre.

Voici encore deux exemples pour illustrer d'autres symétries.

Exemple 4	Exemple 5
Représenter la fonction polaire $$\rho^2 = \sin 2\theta$$	Représenter la fonction polaire $$\rho = 1 + \sin\theta$$
	

Avant d'entamer la représentation d'une courbe, il faut toujours essayer de …

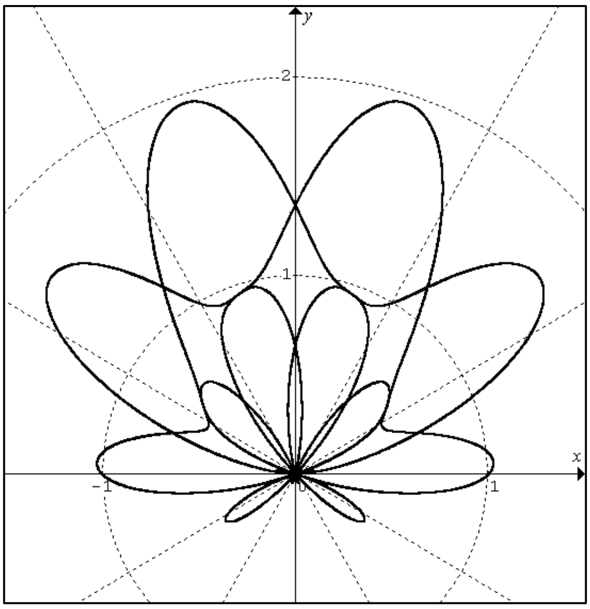
Tirer parti des symétries

- Si l'équation polaire ne change pas lorsque θ est remplacé par $(-\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire (c'est le cas dans les exemples 1, 2 et 3).
- Si l'équation polaire ne change pas lorsque ρ est remplacé par $(-\rho)$, la courbe est symétrique par rapport au pôle (exemple 4).
- Si l'équation polaire ne change pas lorsque θ est remplacé par $(\pi + \theta)$, la courbe est symétrique par rapport au pôle (voir par exemple l'exercice n°12, page 7).
- Si l'équation polaire ne change pas lorsque θ est remplacé par $(\pi - \theta)$, la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.
- Si l'équation polaire ne change pas lorsque θ est remplacé par $(-\theta)$, et ρ par $(-\rho)$, la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (voir par exemple l'exercice n°9, page 7).

Petit voyage au pays des courbes …

Déterminer les éléments de symétrie et représenter graphiquement les fonctions polaires suivantes. Utiliser une calculatrice graphique ou un logiciel. Préciser dans quel intervalle il faut faire varier θ.

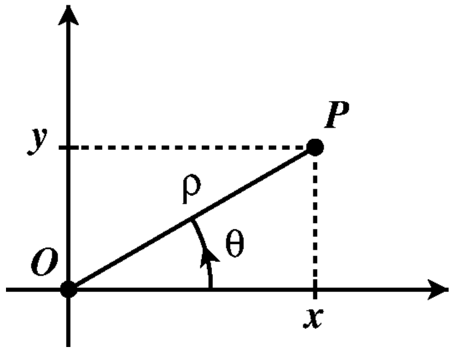
1. $\rho = 2$ (une courbe familière ; généraliser)
2. $\theta = \frac{\pi}{3}$ (tout aussi familier ; généraliser)
3. $\rho = 3 \cdot (1 - \sin\theta)$ (cardioïde)
4. $\rho = 2 \cdot \sin 2\theta$ (rosace à quatre feuilles)
5. $\rho = \cos 3\theta$ (rosace à … feuilles)
6. $\rho = \theta$ (pour $\theta \geq 0$) (spirale d'Archimède)
7. $\rho = \frac{2}{\theta}$ (pour $\theta > 0$) (spirale hyperbolique)
8. $\rho = e^{2\theta}$ (pour $\theta \geq 0$) (spirale logarithmique)
9. $\rho^2 = 4 \cdot \cos 2\theta$ (lemniscate)
10. $\rho = 4 + \frac{2}{\cos\theta}$ (conchoïde ; montrer que $x = 2$ est une tangente verticale)
11. $\rho = 4 \cdot \sin\theta \cdot \tan\theta$ (cissoïde de Dioclès ; trouver l'asymptote verticale)
12. $\rho = 5 + \tan\theta$
13. $\rho = 1 + 2 \cdot \sin\frac{\theta}{2}$ (néphroïde)
14. $\rho = \frac{3 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$ (folium de Descartes ; trouver l'asymptote oblique)
15. $\rho = \sin\frac{8\theta}{5}$



La courbe d'équation $\rho = \sin\theta + \sin^3\frac{5\theta}{2}$ *réalisée avec* G*RAPHMATICA*.

3. Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires

Voici un point P repéré à la fois par ses coordonnées cartésiennes (x,y) dans un repère orthonormé, et par des coordonnées polaires (ρ,θ) .



Pour passer d'un système de coordonnées à l'autre, nous pouvons utiliser les relations encadrées ci-dessous. Elles sont valables quelle que soit la valeur de ρ , qu'elle soit positive, négative ou nulle (expliquer).

> Dans un repère orthonormé du plan, si un point P a pour coordonnées cartésiennes (x,y) , et pour coordonnées polaires (ρ,θ) , alors nous avons les relations suivantes :
>
> - $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$
> - $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (si $x \neq 0$)
> - $\rho^2 = x^2 + y^2$

Exercices

1. Voici les coordonnées polaires de points du plan. Quelles sont leurs coordonnées cartésiennes ?

a) $A\left(3,\dfrac{\pi}{4}\right)$	c) $C\left(-3,\dfrac{5\pi}{3}\right)$	e) $E\left(6,\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$
b) $B\left(8,\dfrac{-2\pi}{3}\right)$	d) $D\left(-2,\dfrac{5\pi}{6}\right)$	f) $F\left(10,\arccos\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right)$

2. Voici les coordonnées cartésiennes de points du plan. Déterminer leurs coordonnées polaires avec $r > 0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) $A(2,-2)$	c) $C\left(-1,\sqrt{3}\right)$	e) $E(2,5)$
b) $B\left(3\sqrt{3},3\right)$	d) $D\left(-\sqrt{3},1\right)$	f) $F(-1,2)$

Transformation d'une équation cartésienne en équation polaire

<u>Exercice résolu</u>

Soit le cercle $\boldsymbol{C}$ d'équation $(x+2)^2+(y-3)^2=13$. Déterminer une équation polaire de $\boldsymbol{C}$.

<u>Solution</u>

En remplaçant x par $\rho\cdot\cos\theta$ et y par $\rho\cdot\sin\theta$, nous obtenons successivement :

$$(\rho\cdot\cos\theta+2)^2+(\rho\cdot\sin\theta-3)^2=13$$

$$\rho^2\cdot\cos^2\theta+4\rho\cdot\cos\theta+4+\rho^2\cdot\sin^2\theta-6\rho\cdot\sin\theta+9=13$$

$$\rho^2\cdot\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\rho\cdot(4\cdot\cos\theta-6\cdot\sin\theta)=0$$

$$\rho^2+\rho\cdot(4\cdot\cos\theta-6\cdot\sin\theta)=0$$

$$\rho\cdot(\rho+4\cdot\cos\theta-6\cdot\sin\theta)=0$$

$$\boxed{\rho=0 \text{ ou } \rho=6\cdot\sin\theta-4\cdot\cos\theta}$$

Le fait d'obtenir $\rho=0$ signifie que le cercle comprend le pôle (on vérifie d'ailleurs que (0,0) est bien solution de l'équation cartésienne). Tous les autres points du cercle satisfont à l'équation $\rho=6\cdot\sin\theta-4\cdot\cos\theta$.

<u>Exercice</u> : transformer chacune des équations cartésiennes suivantes en équations polaires ; décrire la courbe correspondante.

a) $x+2y-1=0$	c) $x^2=8y$	e) $x\cdot y=8$
b) $y^2-x^2=4$	d) $(x-1)^2+y^2=1$	f) $4x^2+y^2-4=0$

Transformation d'une équation polaire en équation cartésienne

<u>Exercice résolu</u>

Soit la courbe $\boldsymbol{P}$ d'équation $\rho^2\cdot\sin2\theta=4$. Déterminer une équation cartésienne de $\boldsymbol{P}$.

<u>Solution</u>

L'équation polaire se transforme en utilisant d'abord la formule de duplication du sinus, et en associant ensuite les facteurs de façon à faire apparaître y et x :

$$\rho^2\cdot\sin2\theta=4\Leftrightarrow\rho^2\cdot2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta=4\Leftrightarrow\rho\cdot\sin\theta\cdot\rho\cdot\cos\theta=2\Leftrightarrow y\cdot x=2\,.$$

La courbe est l'hyperbole équilatère représentant la fonction $y=2/x$.

<u>Exercice</u> : transformer chacune des équations polaires suivantes en équations cartésiennes ; décrire la courbe correspondante.

a) $\rho=2\cdot\sin\theta$	c) $\rho=\tan\theta$	e) $\rho^2\cdot\sin2\theta=4$
b) $\rho\cdot\cos\theta=3$	d) $\rho^2\cdot\cos2\theta=1$	f) $\rho^2\cdot\left(\cos^2\theta+4\sin^2\theta\right)=16$

4. Équations polaires des coniques

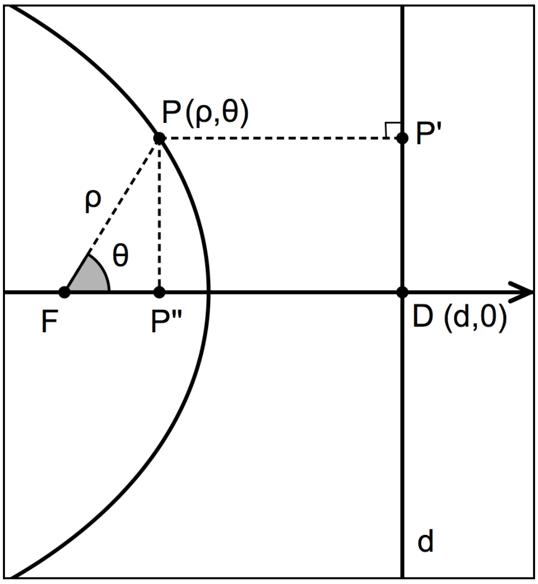
Dans le chapitre sur les coniques, nous avons vu que ces courbes peuvent être déterminées par une *équation focale*.

Rappelons qu'une telle équation est de la forme

$$d(P,F) = e \cdot d(P,d) \ ,$$

où P est un point quelconque de la conique, F est un de ses foyers (ou son foyer s'il s'agit d'une parabole), d est la directrice associée à ce foyer et e est une constante strictement positive, appelée *excentricité*.

La figure ci-dessous montre des positions possibles de F et de d, le foyer se trouvant sur l'axe des abscisses, la directrice étant perpendiculaire à celui-ci et située à droite du foyer. Nous envisagerons d'autres cas plus loin.



Afin de déterminer l'équation polaire d'une conique, choisissons d'abord un système de coordonnées polaires : prenons F comme pôle, et la perpendiculaire à d passant par F comme axe polaire (orienté positivement vers la droite).

Soit le point $D(d,0)$ (avec $d > 0$) le point d'intersection de la directrice avec l'axe polaire.

Envisageons d'abord le cas où $0 < e \leq 1$, c'est-à-dire d'une ellipse ou d'une parabole.

Comme $d(P,F) = e \cdot d(P,d)$, si $e \leq 1$, on a :

$$d(P,F) \leq d(P,d) \ ,$$

et le point P se trouve à gauche de d .

En désignant par P'' la projection orthogonale de P sur l'axe polaire, nous avons donc :

$$d(P,d) = d(P,P') = d(F,D) - d(F,P'') = d - \rho \cdot \cos\theta \ .$$

Repartant de l'équation focale, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} d(P,F) = e \cdot d(P,d) \quad &\Leftrightarrow \quad \rho = e \cdot (d - \rho \cdot \cos\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad \rho = e \cdot d - e\rho \cdot \cos\theta \\ &\Leftrightarrow \quad \rho \cdot (1 + e \cdot \cos\theta) = e \cdot d \\ &\Leftrightarrow \quad \rho = \frac{ed}{1 + e \cdot \cos\theta} \end{aligned}$$

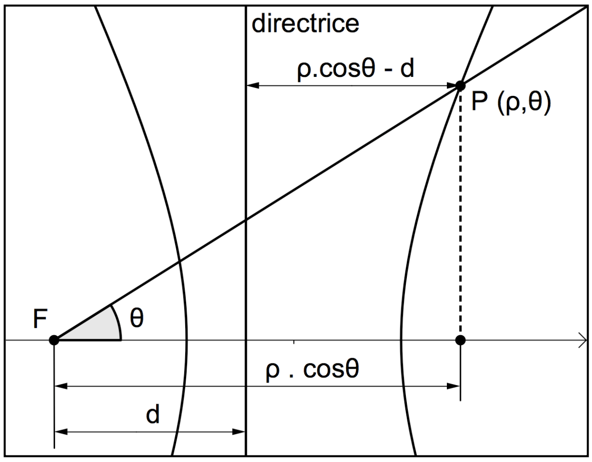
Le dénominateur du membre de gauche ne s'annule jamais si $0 < e < 1$ (expliquer).
Par contre, si $e = 1$, il s'annule pour $\theta = \pi$ (cela correspond bien sûr au fait que la parabole est ouverte vers la gauche, et qu'on ne trouve aucun point dans la direction $\theta = \pi$).

Que se passe-t-il si $e > 1$ (cas d'une l'hyperbole) ?

Dans ce cas, il y a des points de la courbe aussi bien à gauche qu'à droite de la directrice d.

Pour ceux qui se trouvent à gauche, nous avons toujours $d(P,d) = d - \rho \cdot \cos\theta$.

Par contre, pour ceux qui se trouvent à droite, nous avons $d(P,d) = \rho \cdot \cos\theta - d$ (voir figure ci-contre).



Toutefois, il n'est pas obligatoire d'envisager ces deux cas.

En effet, nous pourrions montrer que l'équation $\rho = \dfrac{ed}{1 + e \cdot \cos\theta}$ suffit à trouver tous les points de l'hyperbole.

Pour comprendre cela, il est utile d'étudier le signe de ρ en fonction de θ. La branche gauche de l'hyperbole correspond aux valeurs positives de ρ, tandis que la branche droite correspond aux valeurs négatives de ρ (voir page 2 pour l'interprétation de $\rho < 0$).

<u>Remarques</u>

- Si nous envisageons le cas où le foyer F est à droite de la directrice, nous obtenons l'équation $\rho = \dfrac{ed}{1 - e \cdot \cos\theta}$ (expliquer).
- Si la directrice est parallèle à l'axe polaire, nous obtenons l'équation $\rho = \dfrac{ed}{1 \pm e \cdot \sin\theta}$ (signe « + » si le foyer est sous la directrice, signe « - » s'il est au-dessus ; expliquer).

Finalement …

Théorème des équations polaires des coniques

Une équation polaire qui a une des quatre formes

$$\rho = \frac{ed}{1 \pm e \cdot \cos\theta} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{ed}{1 \pm e \cdot \sin\theta}$$

est une conique. Il s'agit d'une parabole si $e = 1$, d'une ellipse si $0 < e < 1$, et d'une hyperbole si $e > 1$.

Exercice résolu

Décrire et représenter la conique dont une équation polaire est $\rho = \dfrac{1}{3+\sqrt{8}\cdot\sin\theta}$.

Solution

Afin de mettre l'équation sous une des formes figurant dans le théorème précédent, mettons 3 en évidence au dénominateur :

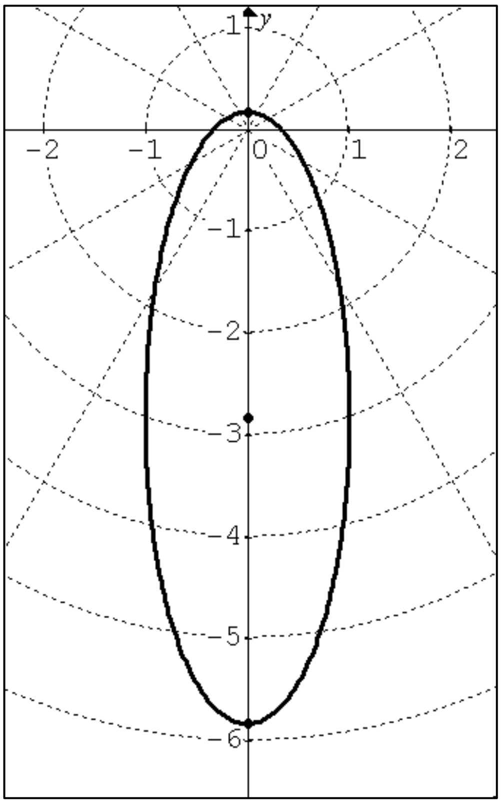
$$\rho = \frac{1}{3\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{8}}{3}\cdot\sin\theta\right)} = \frac{\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{8}}{3}\cdot\sin\theta} .$$

Nous en déduisons déjà que $e = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \approx 0{,}9428$, et que la conique est une ellipse.

La forme de l'équation nous apprend en outre que le foyer (le pôle) est situé sous sa directrice, qui est parallèle à l'axe polaire ($d \equiv y = 1/\sqrt{8}$; expliquer). Il s'agit donc d'une ellipse verticale ; son axe focal est perpendiculaire à l'axe polaire.

Calculons les sommets situés sur l'axe focal (dans les directions $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$) :

- $S_1\left(\dfrac{1}{3+\sqrt{8}},\dfrac{\pi}{2}\right) \approx \left(0.1716,\dfrac{\pi}{2}\right)$
- $S_2\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{8}},-\dfrac{\pi}{2}\right) \approx \left(5.8284,-\dfrac{\pi}{2}\right)$.



La longueur $2a$ du grand axe est ainsi égale à :

$$\frac{1}{3+\sqrt{8}} + \frac{1}{3-\sqrt{8}} = 6 \quad (a = 3).$$

Le centre M de l'ellipse est le milieu du segment $[S_1S_2]$.

En coordonnées polaires : $M\left(\sqrt{8},-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (expliquer).

Sachant que $e = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{c}{a}$ et que $a = 3$, nous trouvons : $c = \sqrt{8}$.

Calculons la longueur du petit axe :

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 8 = 1 .$$

Exercice : vérifier qu'en coordonnées cartésiennes, cette ellipse a pour équation

$$x^2 + \frac{\left(y+\sqrt{8}\right)^2}{9} = 1 .$$

Exercices : équations polaires de coniques

Pour chacune des équations polaires suivantes, décrire précisément de quel type de conique il s'agit. Ensuite, construire la conique.

1. $\rho = \dfrac{10}{3 + 2 \cdot \cos\theta}$

2. $\rho = \dfrac{10}{2 + 3 \cdot \sin\theta}$

3. $\rho = \dfrac{15}{4 - 4 \cdot \cos\theta}$

4. $\rho = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

5. $\rho = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$

6. $\rho = \dfrac{-6}{1 + 2 \cdot \cos\theta}$
